TAMSAYILI PROGRAMLAMA

Doğrusal programlama problemlerinin çözüm sonuçları, çoğunlukla tamsayı olmayan pozitif sayılardır. Yani kesirli ya da ondalıklı sayılardır.

Günlük hayatta sonuçların, tamsayılarla ifade edilmesi gereken durumlar vardır. Örneğin otomobil, televizyon, masa, sandalye gibi malların üretilecek miktarlarının tamsayılarla ifade edilmesi gerekir. Bu tür şartlarla analiz yapma durumunu belirten modele, Tamsayılı Programlama modeli denir.

Bir Tamsayılı Programlama Modeli genel gösterimle,

[Max / Min] Z : $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Kısıt Denklemleri:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ (\leq, \geq, =)\ b_i \qquad , \quad i = 1, \ldots, m \quad ; (j = 1, \ldots, n$$

$x_j \geq 0$ ve tamsayı

biçiminde ifade edilebilir. Burada,

Z : Amaç fonksiyonu

x_j : Karar değişkenleri

c_j : Amaç fonksiyonundaki karar değişkenlerinin katsayıları olan sabitler

a_{ij} : Kısıtların sol tarafında bulunan teknolojik katsayılar

b_i : Sağ taraf sabitleri

anlamındadır.

Değişkenlerin tümünün değil de bazılarının tamsayılı değerler alması istenen problemlere, **Karma Tamsayılı Programlama Problemi** adı verilir.

Tamsayılı Programlama problemlerinin çözümünde,

- Tam olmayan çözümün yuvarlaklaştırılması
- Grafik çözüm
- Gomory Kesme Düzlemi algoritması
- Dal-Sınır algoritması

tekniklerinden yararlanılır.

Gomory Kesme Düzlemi Algoritması

Bu algoritmada başlangıç noktası olarak, doğrusal programlama probleminin simpleks çözüm yöntemiyle elde edilen optimal çözümü ele alınır.

Eğer bu çözüm, tamsayılı bir çözüm değilse, doğrusal programlama problemine ek bir kısıtlama ilave edilir. Bu ek kısıtlama Gomory'nin geliştirdiği "Kesme Düzlemi" kuralına göre elde edilir.

Bu kuralda; simpleks yöntem ile elde edilen optimal çözüm değerlerinden, *en büyük kesir değerli karar değişkeni* seçilir.

Sonra bu değişkenin satırında bulunan rakamlar, tamsayılı ve kesirli olarak yazılır(Değişkenlerin katsayıları = TDD biçiminde). Tamsayılı kısımlar, denklemin sağ tarafında toplanır. Sağ tarafta yer alan tamsayılı değerler atılır ve sadece kesirli rakam bırakılır. Bu durumda denklem, eşitsizlik biçimine dönüşecektir ve yeni bir kısıtlayıcı elde edilmiş olacaktır.

Elde edilen bu ek kısıtlayıcı, boş değişken kullanılarak eşitlik haline getirilir ve tamsayılı olmayan optimal çözüm tablosuna eklenerek dual simpleks çözüm yapılır.

Şayet kesirli kısımdaki rakamlar arasında negatif olanı varsa, bunun yerine eşleşiği kullanılır. Yani kesirli rakamların negatif olmaması gerekir.

NOT: İki kesirli sayı(x ve y olsun) arasındaki fark, bir tamsayı ise bu iki sayıya eşleşik denir ve $x \equiv y$ ile gösterilir.

Örneğin, $X=-2/3$ ise bunun eşleşiği $y=1/3$ tür. Yani, $-2/3 \equiv 1/3$ tür.

Örneğin, $-4/9 \equiv 5/9$ dur.

Kesirli sayılar, tam ve kesirli kısım olarak

$4/3=1+1/3$, $5/4=1+1/4$, $2/3=0+2/3$, $-2/3 = -1+1/3$

biçiminde yazılırlar.

Örnek: Aşağıdaki problemin optimal çözümünü bulunuz.

Maksimum Z : $3x_1 + x_2$

Kısıtlayıcılar:

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$3x_1 - 4x_2 \leq 12$$

$$x_1 , x_2 \geq 0 \text{ ve tamsayı}$$

Çözüm: Problem, bir tamsayılı programlama problemidir. Önce kısıtlardaki eşitsizlikler eşitlik haline getirilerek simpleks çözüm yapılır.

Maksimum Z : $3x_1 + x_2$

Kısıtlayıcılar:

$x_1 + 2x_2 + s_1 = 8$

$3x_1 - 4x_2 + s_2 = 12$

			3	1	0	0
	TD	TDD	X1	X2	S1	S2
0	S1	8	1	2	1	0
0	S2	12	3	-4	0	1
	Zj	0	0	0	0	0
	Zj-Cj	-	-3	-1	0	0

			3	1	0	0
	TD	TDD	X1	X2	S1	S2
0	S1	4	0	10/3	1	-1/3
3	X1	4	1	-4/3	0	1/3
	Zj	12	3	-4	0	1
	Zj-Cj	-	0	-5	0	1

			3	1	0	0
	TD	TDD	X1	X2	S1	S2
1	X2	6/5	0	1	3/10	-1/10
3	X1	28/5	1	0	4/10	2/10
	Zj	18	3	1	15/10	5/10
	Zj-Cj	-	0	0	15/10	5/10

$Z_j - C_j \geq 0$ olduğundan optimal çözüm bulunmuştur.

Optimal çözüm:

$x_1 = 28/5$, $x_2 = 6/5$, max Z = 18

biçimindedir.

x_1 ve x_2 'nin tamsayı olması istenmekte fakat optimal çözümde tamsayılı değerler almıyorlar.

Gomory Kesme Düzlemi Algoritması ile çözüm yapalım.

$x_1 = 28/5 = 5+2/3$

$x_2 = 6/5 = 1+1/5$

olup, en büyük kesirli değere sahip olan değişken x_1 seçilir.

Son tablodaki x_1 'in satırında bulunan sayılar, tamsayı ve kesirli olarak aşağıdaki biçimde yazılır:

X1	X2	S1	S2	TDD
1	0	4/10= 2/5	2/10=1/5	28/5
1+0	0+0	0+2/5	0+1/5	5+3/5

$$(1+0)\,x_1 + (0+0)\,x_2 + (0+2/5)\,s_1 + (0+1/5)\,s_2 = 5+3/5$$

Tamsayılı kısımlar denklemin sağ tarafında toplanır:

$$0x_1 + 0x_2 + (2/5)\,s_1 + (1/5)\,s_2 = 3/5 + \cancel{(\,5 - 1\,x_1 - 0\,x_2 - 0\,s_1 - 0\,s_2\,)}$$

$$(2/5)\,s_1 + (1/5)\,s_2 \geq 3/5$$

olur. Bu eşitsizlik, ek kısıtlamamızdır. Eşitlik haline getirip, tamsayılı olmayan optimal çözüm tablosuna eklenerek **dual simpleks yöntem** ile çözüm yapılır.

$$(2/5)\,s_1 + (1/5)\,s_2 \geq 3/5$$

$$-(2/5)\,s_1 - (1/5)\,s_2 \leq -3/5$$

$$-(2/5)\,s_1 - (1/5)\,s_2 + s_3 = -3/5$$

			3	1	0	0	0
	TD	TDD	X1	X2	S1	S2	S3
1	X2	6/5	0	1	3/10	-1/10	0
3	X1	28/5	1	0	4/10	2/10	0
0	S3	-3/5	0	0	-2/5	-1/5	1
	Zj	18	3	1	15/10	5/10	0
	Zj-Cj	-	0	0	15/10	5/10	0

Dual simpleks yöntem ile çözümde önce anahtar satır seçilir.

TDD'leri içinde, işaret olarak negatiflerin mutlak değerce en büyüğü anahtar satır alınır.

Daha sonra anahtar satırdaki negatif değerler için,

Min $\left| Zj - Cj\,)\,/\,y_{kj} \right|$, y_{kj}: anahtar satırdaki negatif değerler

seçilerek anahtar sütün belirlenir. Diğer işlemler, simpleks yöntemdeki gibidir.

			3	1	0	0	0
	TD	TDD	X1	X2	S1	S2	S3
1	X2	6/5	0	1	3/10	-1/10	0
3	X1	28/5	1	0	4/10	2/10	0
0	S3	-3/5	0	0	-2/5	-1/5	1
	Zj	18	3	1	15/10	5/10	
	Zj-Cj	-	0	0	15/10	5/10	

			3	1	0	0	0
	TD	TDD	X1	X2	S1	S2	S3
1	X2	3/2	0	1	1/2	0	-1/2
3	X1	5	1	0	0	0	1
0	S2	3	0	0	2	1	-5
	Zj	33/2	3	1	1/2	0	5/2
	Zj-Cj	-	0	0	1/2	0	5/2

Zj-Cj ≥ 0 olduğundan optimal çözüm bulunmuştur.

$x_1 = 5$ $\quad$ $x_2 = 3/2$ $\quad$ max $Z = 33/2$

Çözümde, $x_2 = 3/2$ olup hala tamsayılı değildir.

$x_2 = 3/2$ için de benzer işlemler yapıldıktan sonra yeni kısıt;

$$(1/2)\ s_1 + (1/2)\ s_3 \geq 1/2$$

olarak elde edilir. Yeni kısıt, eşitlik haline getirilip son tabloya eklenir ve dual simpleks yöntem uygulanırsa aşağıdaki çözüm elde edilir:

			3	1	0	0	0	0
	TD	TDD	X1	X2	S1	S2	S3	S4
1	X2	1	0	1	0	0	-1	1
3	X1	5	1	0	0	0	1	0
0	S2	1	0	0	0	1	-7	4
0	S1	1	0	0	1	0	1	-2
	Zj	16	3	1	0	0	2	1
	Zj-Cj	-	0	0	0	0	2	1

Zj-Cj ≥ 0 olduğundan optimal çözüm bulunmuştur.

$x_1 = 5$ $\quad$ $x_2 = 1$ $\quad$ max $Z = 16$

Tüm karar değişkenleri tamsayılı değer aldıklarından çözüm bitmiştir.